ESCP
ÉCOLE SUPÉRIEURE
DE COMMERCE
DE PARIS
79, avenue de la république
75011 paris - tél. : 355.39.08

CONCOURS D'ENTRÉE 1980

Mathématiques 2e épreuve

Durée 3 heures

PROBLEME 1

Soit E l'espace vectoriel sur le corps des réels $\mathbb{R}$ composé des fonctions polynômes à coefficients réels à une inconnue réelle de degré inférieur ou égal à deux et du polynôme nul. Pour tout élément p de E nous désignerons respectivement par p' et p'' les fonctions dérivée première et dérivée seconde de p.

Soit Φ l'application qui à tout polynôme $p \in E$ associe la fonction $\Phi(p)$ définie pour tout x réel par :

$$[\Phi(p)](x) = \int_0^1 \left[ap(t)+bxtp'(x-t)+cx^2t^2p''(x-t)\right]dt$$

où a,b,c sont des éléments du corps des réels $\mathbb{R}$.

Nous noterons $\beta=(p_0,p_1,p_2)$ la base canonique de E avec pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$p_0(x)=1 \; ; \; p_1(x)=x \; ; \; p_2(x)=x^2$$

Question 1 Montrer que Φ est un endomorphisme de E

Question 2 Déterminer la matrice A de l'endomorphisme Φ dans la base β

A quelle(s) condition(s) sur a,b,c l'endomorphisme Φ est-il bijectif ?

.../...

Question 3 Considérons le cas particulier a=6, b=6, c=3

a - Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme Φ

b - Déterminer une base de chacun des sous espaces propres

c - Déterminer pour tout entier naturel n non nul la matrice B de l'endomorphisme Φ^n dans la base β

PROBLEME 2

Dans une banque on procède à une étude statistique sur un échantillon E de n clients. Pour chacun des clients on a relevé d'une part une estimation du revenu mensuel et d'autre part la valeur du solde moyen du compte courant (évalué sur une période donnée).

La variable statistique "revenu d'un client" est notée X ; la variable statistique "solde moyen du compte courant d'un client" est notée Y.

On donne ci-dessous le tableau des fréquences absolues correspondant à la distribution statistique du couple (X,Y) sur l'échantillon E observé (n=1000) (on a regroupé en classes les valeurs de X et de Y exprimées en francs).

classes de X \ classes de Y	$0 \leqslant Y < 1000$	$1000 \leqslant Y < 2000$	$2000 \leqslant Y < 3000$	$3000 \leqslant Y < 4000$	$4000 \leqslant Y < 5000$
$3000 \leqslant X < 5000$	60	30	10	0	0
$5000 \leqslant X < 7000$	70	100	20	10	0
$7000 \leqslant X < 9000$	80	100	150	18	2
$9000 \leqslant X < 11000$	40	60	90	50	10
$11000 \leqslant X < 13000$	10	20	45	15	10

Nous noterons c_i ($i \in \{1,2,...5\}$) les centres des classes des valeurs de X ($c_1=4000, c_2=6000, c_3=8000, c_4=10000, c_5=12000$)

.../...

Soit $\{E_1, E_2, \ldots E_5\}$ la partition de l'ensemble E, telle que E_i désigne le sous ensemble de E des clients dont le revenu appartient à la classe de centre c_i ; nous noterons n_i le nombre d'éléments de E_i.

La distribution de la variable statistique Y sur le sous ensemble E_i de E est dite distribution conditionnelle de Y pour $X=c_i$; la moyenne et l'écart type de cette distribution de Y sont respectivement appelés moyenne conditionnelle et écart type conditionnel de Y pour $X=c_i$ et notées m_{Y/c_i} , σ_{Y/c_i}.

Question 1

Dans un plan affine rapporté au repère orthogonal $(o,\vec{x},\vec{y})$ on considère un ensemble de k points M_i (i=1,2,...k) non alignés de coordonnées (x_i,y_i) ; on affecte à chaque point M_i un coefficient m_i (nombre réel strictement positif).
Dans les calculs on utilisera les notations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = M \; ; \; \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i = \overline{X} \; ; \; \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{k} m_i y_i = \overline{Y}$$

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i y_i = \overline{XY} \; ; \; \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i^2 = \overline{X^2} \; ; \; \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{k} m_i y_i^2 = \overline{Y^2} \; .$$

Démontrer qu'il existe une droite D, et une seule, d'équation $y=ax+b$ pour laquelle la somme

$$\sum_{i=1}^{k} (y_i - ax_i - b)^2 m_i \quad \text{est minimale}$$

Quelle est l'équation de cette droite que l'on appellera droite d'ajustement de l'ensemble des k points M_i affectés des coefficients m_i ? On remarquera que les écarts entre les points M_i et la droite D sont mesurés parallèlement à l'axe $(o,\vec{y})$.

Remarque :

Compte tenu du programme du concours les solutions se référant à la notion de dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables ne peuvent être acceptées

.../...

Dans les questions suivantes les résultats numériques seront donnés avec deux décimales.

QUESTION 2

Calculer la moyenne et l'écart type de la variable X dans E.
Calculer les moyennes conditionnelles m_{y/c_i} ($i \in \{1,2,\ldots,5\}$) de la variable Y sur les ensembles E_i.
Tracer dans le repère orthogonal $(o,\vec{x},\vec{y})$ la ligne polygonale (M_1,M_2,M_3,M_4,M_5) où M_i est le point de coordonnées $(c_i, m_{y/c_i})$
Interpréter le graphique ainsi obtenu (2 lignes maximum).

QUESTION 3

En utilisant le résultat de la question 1, déterminer l'équation de la droite d'ajustement de l'ensemble des points M_i ($i=1,2,\ldots5$) définis à la question 2, chacun d'eux étant affecté du coefficient $m_i = \frac{n_i}{n}$ (les écarts étant mesurés parallèlement à l'axe $(o,\vec{y})$).

Remarque :

Les candidats n'ayant pas résolu la question 1 pourront utiliser le résultat suivant : la droite considérée est la droite de régression de Y en X.

QUESTION 4

Calculer, sur l'échantillon E observé, la valeur du coefficient de corrélation linéaire du couple (X,Y).
Interpréter le résultat (2 lignes maximum).

o ——————————— o

o ——— o

o

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail